Frazioni continue

Numeri decimali

Conosciamo la rappresentazione decimale delle frazioni e delle radici quadrate.

Le abbiamo rappresentate con numeri decimali, limitati e/o periodici, nel caso delle frazioni, illimitati e non periodici nel caso delle radici.

$\frac{1}{2} = 0.5$ Numero decimale limitato

$\frac{2}{3} = 0.666666666$ Numero decimale periodico

$\sqrt{2} = 1.41421356237$ Approssimazione della radice di 2

Un altro modo …

Le frazioni continue sono un altro modo per rappresentare i numeri razionali …

I° Caso: i numeri razionali

$\frac{a}{b}$: $\frac{107}{78}$

La frazione rappresenta una divisione tra due numeri interi ed è costituita da una parte intera e da un resto

$a = b \cdot q + r \qquad r < b$

iPart (107/78) : 1

Mod (107 , 78) : 29

$\frac{107}{78}$: $1 + \frac{29}{78}$

Dove $29 < 78$

$\frac{29}{78}$ È minore di 1 $\qquad \frac{78}{29} > 1$

$$\frac{107}{78} : 1+\cfrac{1}{\cfrac{78}{29}} : 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{29}{20}}} : 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{20}{9}}}} :$$

$$: 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}}}$$

[1 , 2 ,1 , 2 , 4 , 2] è la rappresentazione di $\frac{107}{78}$ ed è composta da un numero limitato di cifre.

Perché è limitata ?

Se facciamo le divisioni successive scambiando b con a, r con b, i resti 29, 20, 9, 2, 1 sono sempre minori del divisore. Il divisore (a parte il primo passaggio) è sempre minore del dividendo e a un certo punto si troverà il resto 0.

$$107 = 78 \cdot 1 + 29$$

$$78 = 29 \cdot 2 + 20$$

$$29 = 20 \cdot 1 + 9$$

$$20 = 9 \cdot 2 + 2$$

$$9 = 2 \cdot 4 + 1$$

$$2 = 1 \cdot 2 + 0$$

Frazioni minori di 1

E se il numero $\frac{a}{b}$ è minore di 1 ?

Nessun problema, esiste una parte intera che è 0…

$$\frac{73}{92} = 0 + \cfrac{1}{\cfrac{92}{73}}$$

… e il processo ricomincerà come nel caso precedente …

$$\frac{73}{92} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{19}{73}}$$

… fino a raggiungere...

$$\frac{73}{92} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3}}}}}$$

Quindi la frazione verrà rappresentata:

[0 ,1 , 3 , 1 , 5 , 3]

Le frazioni MINORI di 1 hanno uno 0 come prima cifra, quelle MAGGIORI di 1 una cifra diversa da 0

Numeri negativi

E se il numero è negativo?

Nessun problema

Esiste sempre una parte intera minore del numero a cui si aggiunge una frazione positiva minore di 1, e il processo ricomincia da capo.

Quindi la prima cifra è negativa e le altre sono positive.

Il procedimento

A pensarci bene abbiamo fatto sempre lo stessa sequenza di operazioni:

PropFrac (a / b)

Per avere la parte intera della divisione da a per b

mod (a , b)

Per avere il resto

Abbiamo sostituito:

b al posto di a

r al posto di b

… e così via finche il resto è 0, o quando propFrac (a / b) è uguale a intdiv (a , b) e ogni volta abbiamo scritto la parte intera.

Programma

Allora possiamo fare un programma che faccia una lista delle parti intere e che dia le rappresentazioni di un numero razionale sotto forma di frazione continua:


```
:frazcont(a,b)
:Prgm
:ClrIO
:{}→c
:1→i
:While propFrac(a/b)≠intDiv(a,b)
:  int(propFrac(a/b))→c[i]
:  Disp propFrac(a/b)
:  mod(a,b)→r
:  b→a
:  r→b
:  i+1→i
:Disp r
:EndWhile
:a→c[i]
:Disp c
:EndPrgm
```

II° Caso: i numeri irrazionali

Cosa cambia se abbiamo un numero irrazionale, ad esempio la radice di 2?

Si conserva…

Esiste la parte intera

iPart ($\sqrt{2}$) : 1

Non si conserva…

Non rappresenta più una divisione, quindi non esiste un resto.

Esiste però un numero compreso tra 0 e 1 che va aggiunto alla parte intera e che deve essere calcolato

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{X_1}$$ Dove $X_1 > 1$

Questa è una equazione e quindi si può risolvere rispetto ad X_1 …

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

Adesso possiamo razionalizzare il denominatore e ottenere…

$$X_1 = \sqrt{2} + 1$$

A sua volta X_1 ha una parte intera che è 2 e una parte compresa tra 0 e 1 che va calcolata

$$X_1 = 2 + \frac{1}{X_2}$$

Adesso calcoliamo X_2

$$\sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{X_2}$$

Effettuando gli stessi calcoli di prima otteniamo:

$$X_2 = \sqrt{2} + 1$$

Osserviamo che X_2 è uguale a X_1, e quindi il processo continua dando luogo sempre allo stesso risultato

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots\ldots\ldots}}}}$$

Rappresentazione di radice di 2

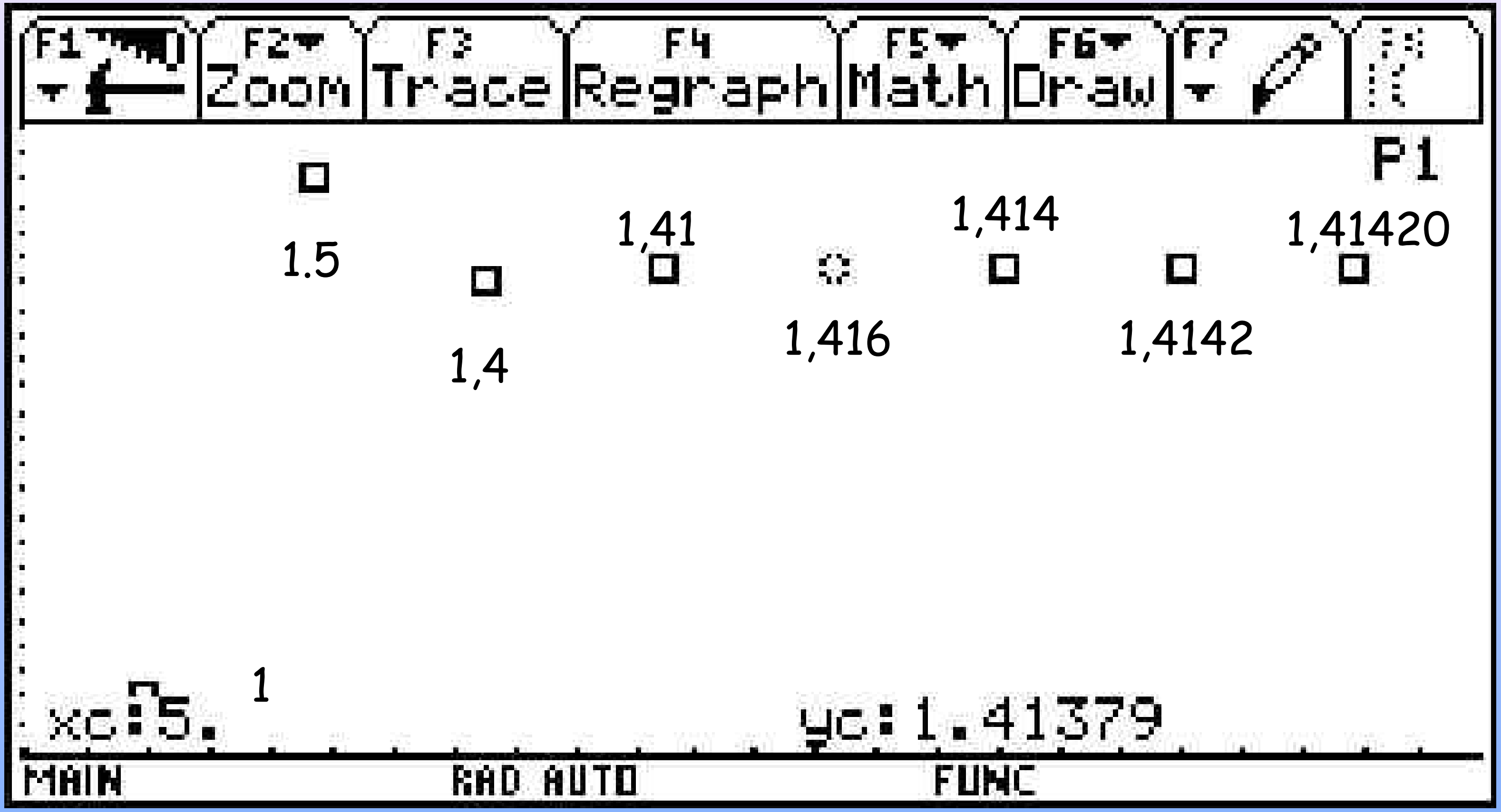
La rappresentazione della frazione continua di radice di 2 è:

$$[\,1\,,\,\overline{2}\,]$$

Quello che abbiamo trovato è un numero periodico, quindi con infinite cifre decimali.

Questo perché X_2 è la somma di una parte razionale che è 1, e una parte irrazionale che è radice di 2, pertanto non potrà mai essere 0, che è un numero razionale.

Approssimazione di radice di 2



Radice di 3

Lo stesso procedimento che abbiamo usato per al rappresentazione di $\sqrt{2}$ lo possiamo applicare a $\sqrt{3}$. Vediamo cosa cambia.

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{X_1}$$

Dove 1 è la parte intera e $\frac{1}{X_1}$ è compreso tra 0 e 1

Risolviamo rispetto a X_1 e otteniamo:

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} = X_1$$

X_1 è a sua volta composto da una parte intera e una parte $\frac{1}{X_2}$ compresa fra 0 e 1

$$X_1 = 1 + \frac{1}{X_2}$$

Sostituendo a X_1 il valore appena trovato e risolvendo rispetto a X_2 otteniamo:

$$X_2 = \sqrt{3} + 1$$

Si potrebbe continuare all'infinito trovando sempre risultati diversi ma invece al prossimo passaggio troviamo

$$X_2 = 2 + \frac{1}{X_3} \qquad \sqrt{3} + 1 = 2 + \frac{1}{X_3} \qquad \text{e infine}$$

$$X_1 = X_3$$

Da questo punto in poi le cifre della parte intera si ripetono periodicamente

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \dots\dots\dots}}}}$$

Soluzione di un'equazione di 2° grado

Come si può risolvere l'equazione?

$$x^2 = 3x + 1$$

Conosciamo la maniera classica delle equazioni di secondo grado:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$$

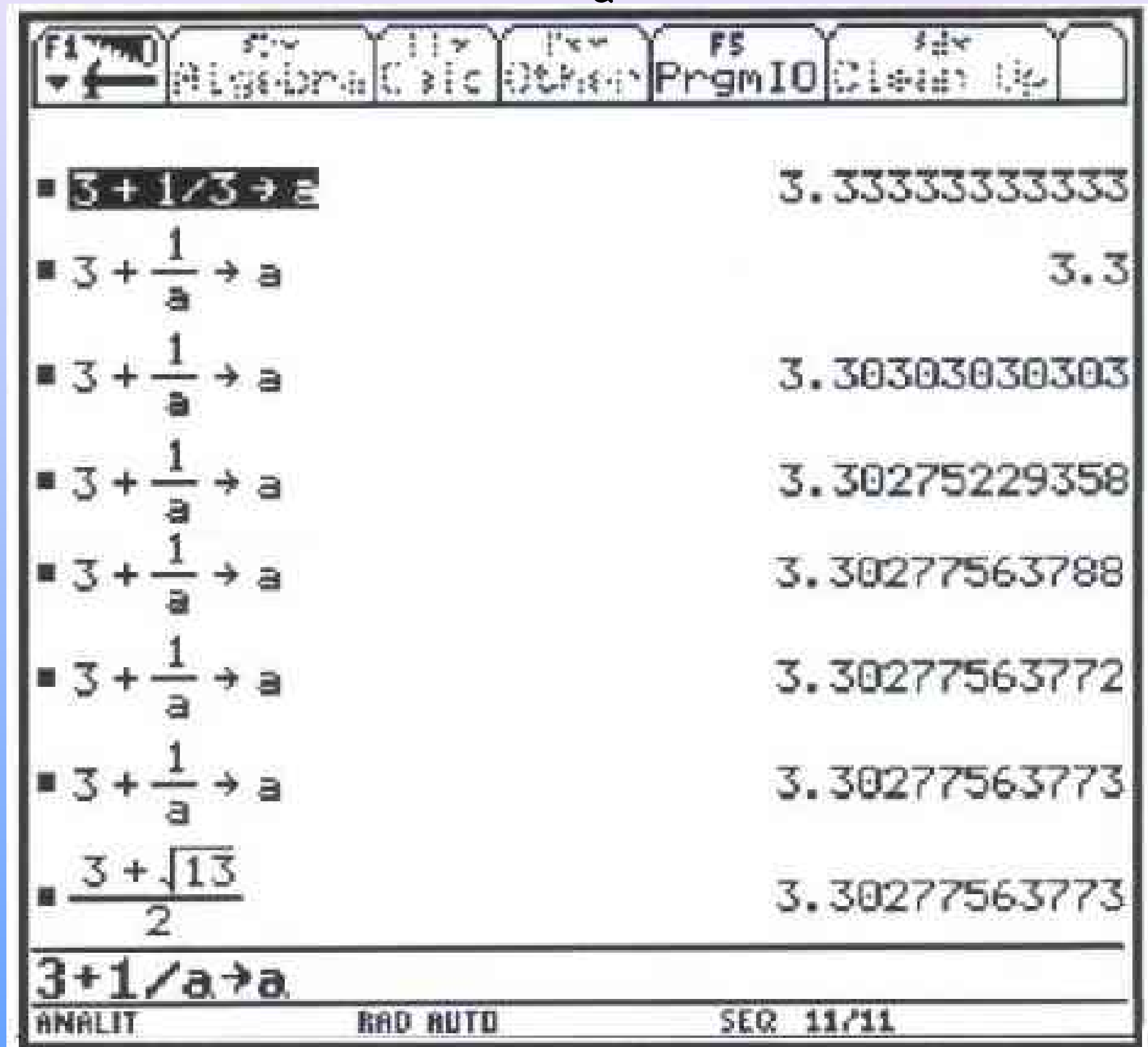
Consideriamo ora la soluzione positiva $x = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{2}$ e proviamo a risolverla diversamente.

Dividiamo per x

$x = 3 + \dfrac{1}{x}$ ma $x = 3 + \dfrac{1}{x}$ E così via

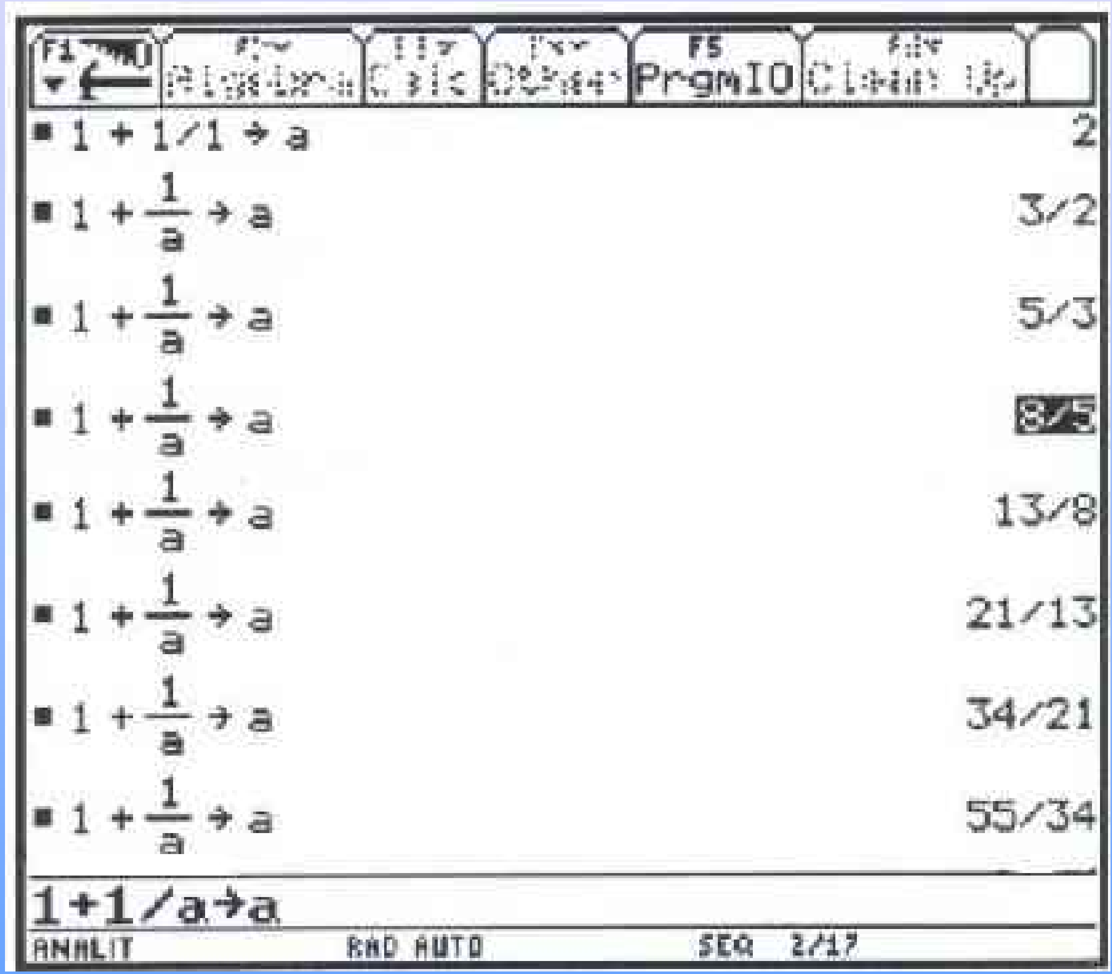
$$x = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \dots}}}}$$

Sulla TI 92 è sufficiente assegnare alla variabile a il valore iniziale 3 e applicare nuovamente l’assegnazione $3 + \dfrac{1}{a} \longrightarrow a$



Se l'equazione fosse stata: $x^2 = x + 1$

Avremmo ottenuto con lo stesso procedimento ponendo $1 \longrightarrow a$ e applicando successivamente l'assegnazione $1 + \dfrac{1}{a} \longrightarrow a$



$$1,\quad 2,\quad \frac{3}{2},\quad \frac{5}{3},\quad \frac{8}{5},\quad \frac{13}{8},\quad \frac{21}{13},\quad \frac{34}{21},\quad \frac{55}{34}$$

I numeri non sono numeri qualsiasi:

- La prima osservazione è che i numeratori e denominatori sono gli stessi numeri ma spostati di un posto;
- La seconda è che ognuno di essi si ottiene sommando i due precedenti.

Numeri di Fibonacci

Questa è la condizione cui soddisfano i numeri di Fibonacci, una volta assegnati i primi due numeri 1 ,1

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

Se utilizziamo la legge di ricorrenza dei numeri di Fibonacci a queste somme, si ottengono questi risultati:

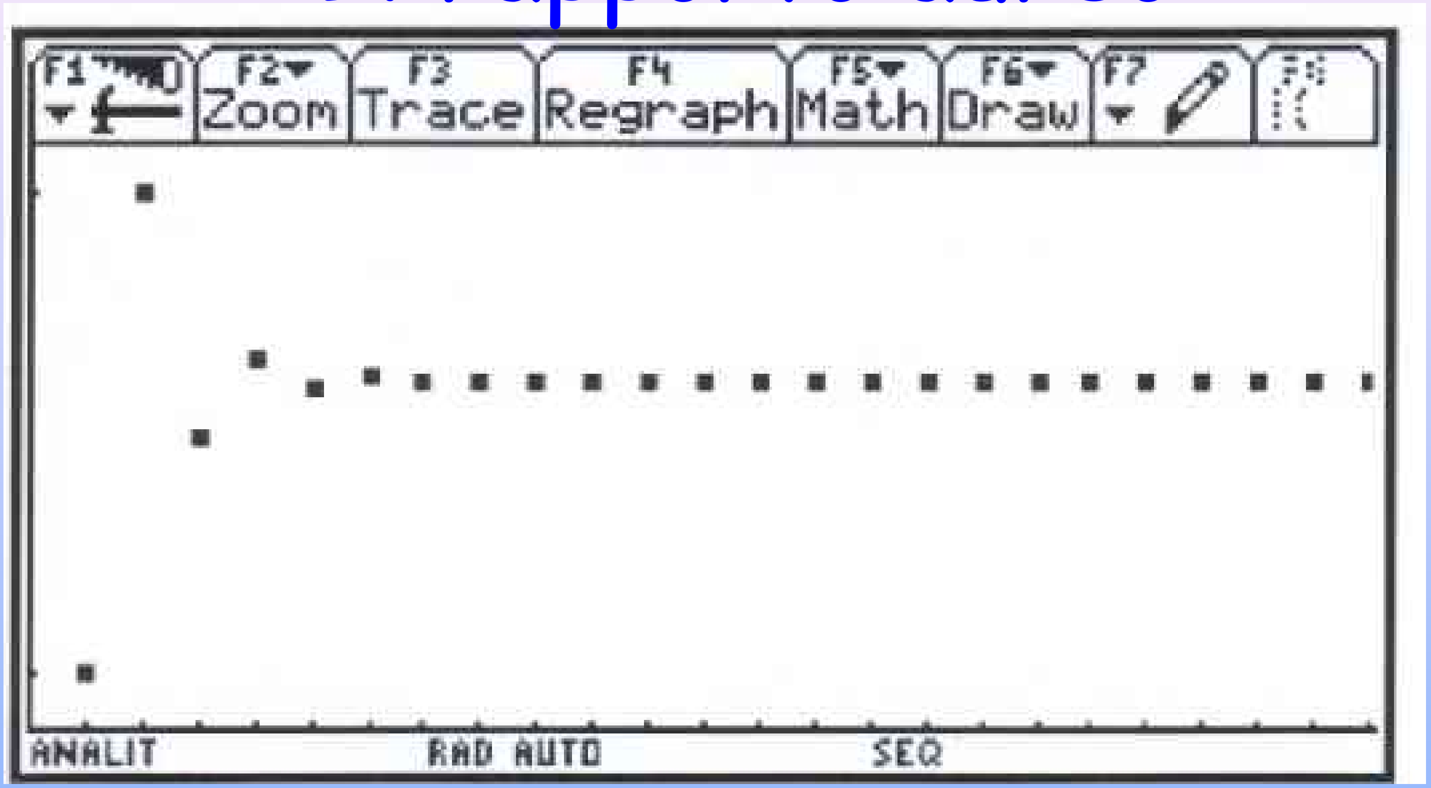
$$1 + \frac{1}{\frac{a_1}{a_o}} = 1 + \frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1 + a_0}{a_1} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1}$$

$$1 + \frac{1}{\frac{a_2}{a_1}} = 1 + \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2 + a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{3}{2}$$

$$1 + \frac{1}{\frac{a_3}{a_2}} = 1 + \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3 + a_2}{a_3} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{5}{3}$$

$$1 + \frac{1}{\frac{a_{u+1}}{a_u}} = \frac{a_{u+1} + a_u}{a_{u+1}} = \frac{a_{u+2}}{a_{u+1}}$$

Il rapporto aureo



Il valore di queste frazioni si avvicina infinitamente al "rapporto aureo" ovvero una delle soluzione dell'equazione di partenza

$x^2 - x - 1 = 0$

$x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ~ 1 ,61803…

Realizzato da:

Classe:

2° C

Professoressa:

Donata Foà

Realizzazione grafica di :

Leonardo Berti