Qualche attività sulle frazioni

16 gennaio 2007

1 Prerequisiti; proposte per una prova d'ingresso

- Secondo Fischbein (riportato da M. Sciolis nel laboratorio didattico SSIS sul corso "Sistemi numerici"), nei ragazzi, all'uscita della terza media, prevale un *modello primitivo* di numero inteso come *numero naturale*. I numeri "decimali" sono spesso percepiti come *due* numeri, uno prima e uno dopo la virgola; sintomo di questa percezione è la difficoltà ad ordinare sulla retta numerica numeri decimali con la stessa parte intera; ad es. 8,7 e 8,25: molti ritengono 8,25 maggiore di 8,7 perché confrontano separatamente le parti intera e decimali (mettere nel test d'ingresso?).

- I ragazzi tendono ad identificare un numero con la scrittura che lo rappresenta; $3/4$ non è percepito come un numero, ma come un'operazione; 0,75 è un numero, non $3/4$. Peggio ancora per $\sqrt{2}$, che rappresenta non un numero, ma un'operazione da eseguire; 1,414... è un numero. Si può pensare ad un quesito che faccia emergere questo aspetto?

- E' stato osservato che diversi ragazzi in uscita dalla scuola media hanno una visione dei sistemi numeri per 'insiemi disgiunti'. Si può forse inserire un quesito in ingresso del tipo "Rappresenta coi diagrammi di Venn gli insiemi numerici che conosci"

2 Proposte didattiche da sviluppare

1. Risolvi la seguente espressione:

$$\left[\left(0,\overline{142857}+0,2\overline{142857}\right)\cdot(9,\overline{3}-0,8\overline{3}-0,\overline{27}\right]\cdot\left(0,\overline{285714}\right)$$

2. Trasformazione del numero decimale in frazione *senza* la 'regola', ma impostando una semplice equazione

3. Problema dell'infinito: Achille e la tartaruga...

4. Dividi un quadrato in due parti uguali (in quanti modi? ... in quanti modi 'equivalenti'? ... con riga e compasso...)

5. Dividi un quadrato in tre parti uguali (in quanti modi? ... in quanti modi 'equivalenti'? ... con riga e compasso...)

6. Dividi un cerchio in 2, 3 4 (...5?...) 6 parti uguali (con riga e compasso)

7. Che parte di cerchio si ottiene sommando la sua metà con la sua terza parte? (concetto di frazioni 'simili'; somma di frazioni 'simili'; impossibilità di sommare frazioni non 'simili'; "semplificazione" e "complicazione" di frazioni)

8. Frazioni e probabilità (Donata, Barbara?)

9. Rappresentazione di numeri razionali sulla retta numerica (Teorema di Talete, Ornella?)

10. Rappresentazione delle frazioni sul piano cartesiano

11. Un possibile quesito per riflettere sulla divisione: "trovare tutti i numeri interi che divisi per 4 danno un quoziente uguale al resto".

12. ...

3 Approfondimento disciplinare

3.1 La lunghezza del periodo

Gli insiemi $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, con le operazioni di somma e prodotto indotti da $\mathbf{Z}$, sono *anelli commutativi.* Il gruppo moltiplicativo $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$, degli elementi di $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ che non dividono la classe nulla ha ordine $\phi(n)$, dove ϕ è la *funzione di Eulero*, cioè la cardinalità dell'insieme

$$\{k \in \mathbf{N} : MCD(k, n) = 1\}.$$

In particolare, se n è un numero primo p, $\phi(p) = p - 1$.

Ricordo che l'ordine di un elemento di un gruppo finito divide l'ordine del gruppo; in particolare il gruppo generato da 10 $(mod n)$ in $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ ha ordine ω che divide $\phi(n)$. Moltiplicando queste potenze di 10 con un numero fisso m si ottiene un'*orbita*, o 'classe laterale', che ha la stessa cardinalità del sottogruppo; il sottogruppo delle potenze di 10 si può vedere come l'orbita dello zero.

Dividere un numero m per un numero n, con la divisione 'lunga', è come dividere per n il numero $m \cdot 10^h$, con h via via più grande, e poi dividere il quoziente per 10^h, sfruttando la proprietà 'invariantiva' della divisione, e la divisione per 10^h dà luogo all'apposizione della virgola nel quoziente; naturalmente anche l'ultimo resto va diviso per 10^h.

L'insieme dei valori modulo n di

$$\{m, m \cdot 10, \ldots, m \cdot 10^{\omega-1}\}$$

dà la successione dei resti nella divisione 'lunga'; pertanto

- il periodo ha lunghezza ω, cioè uguale all'ordine di 10 $mod(n)$, che è un divisore di $\phi(n)$;
- la lunghezza del periodo è indipendente da m.

3.2 L'antiperiodo

Consideriamo la solita frazione m/n; possiamo supporre $m < n$; se $m \geq n$ risciviamo la frazione come somma di un numero intero e di una frazione propria.

Per quanto detto sopra, quando il numero 10 è primo con n, il numero decimale corrispondente è periodico puro. Se invece n contiene come fattori 2 o 5, allora possiamo scrivere, a meno di passare ad una frazione equivalente:

$$n = 10^k \cdot h,$$

con h primo con 10.

Allora la frazione m/n può essere scritta come:

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{10^k \cdot h} = \frac{a}{10^k} + \frac{b}{h},$$

per opportuni a e b interi.

Per poter fare questo, occorre risolvere l'equazione diofantea

$$a \cdot h + b \cdot 10^k = m.$$

Grazie all'algoritmo di Euclide per il calcolo del MCD, sappiamo che questa equazione è risolubile per ogni m se e solo se h e 10^h sono primi fra loro, ed è proprio il nostro caso.

Poiché:

- $a/10^k$ è un numero decimale finito di lunghezza k
- b/h è un numero decimale periodico puro

la loro somma è un numero decimale periodico misto, con antiperiodo di lunghezza k e periodo di lunghezza uguale all'ordine di 10 $mod(h)$.